

Introduction à la plasticité

Georges Cailletaud, Samuel Forest

Centre des Matériaux
Mines Paristech/CNRS

Plan

Rhéologie

Matériaux

Critères insensibles à la pression hydrostatique

Plasticité 3D sans écrouissage

Plasticité 3D avec écrouissage

Plan

Rhéologie

Matériaux

Critères insensibles à la pression hydrostatique

Plasticité 3D sans écrouissage

Plasticité 3D avec écrouissage

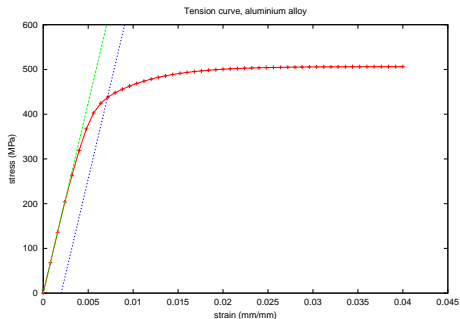
Traction sur alliage métallique



www.mts.com

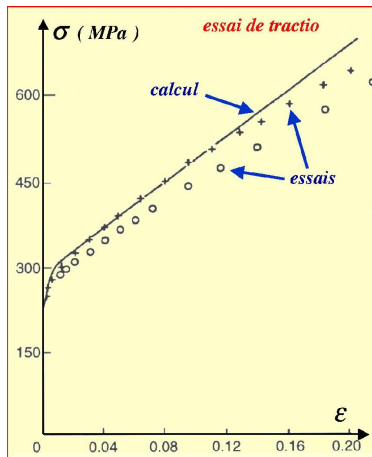
Résultat de traction sur un alliage d'aluminium

- Domaine d'élasticité, écoulement plastique
- Limite d'élasticité conventionnelle, qui donne 0.2% de déformation résiduelle à la décharge



Doc. Mines Paris-CDM, Evry

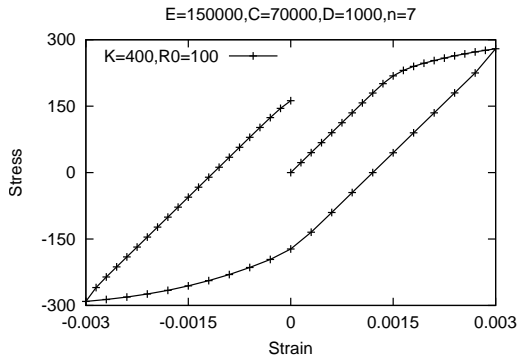
Résultat de traction sur un acier inoxydable



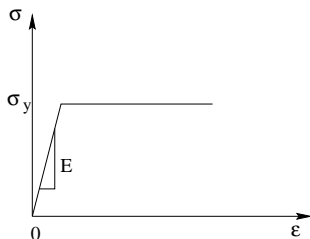
Doc. ONERA-DMSE, Châtillon

Traction et compression sur un alliage d'aluminium

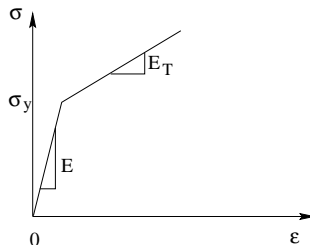
- Essai à déformation imposée symétrique $\pm 0.3\%$
- A contrainte nulle, il reste une déformation positive
- A déformation nulle, la contrainte est devenue négative



Modèles schématisant les résultats précédents



a. Élastique–parfaitement plastique

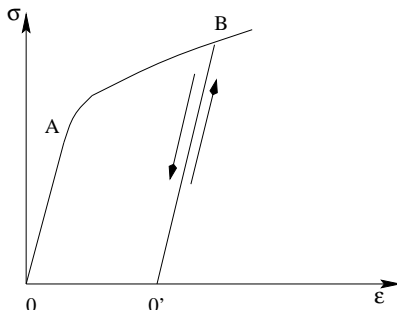


b. Élastique–plastique linéaire

Module élastoplastique, $E_T = d\sigma/d\varepsilon$.

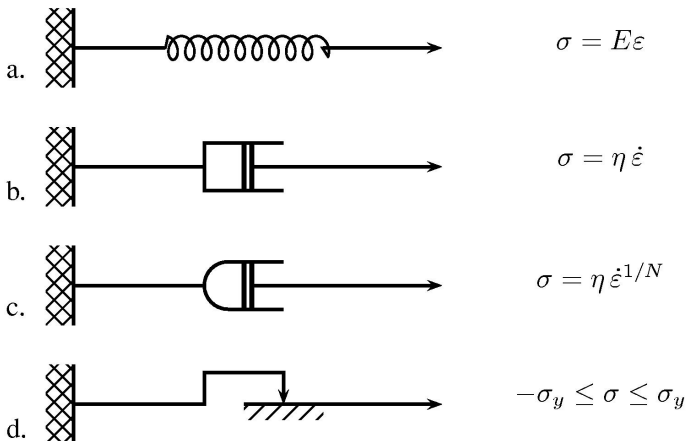
Le module élastoplastique est nul pour un matériau élastique-parfaitement plastique, constant pour un matériau élastique-plastique linéaire ; il sera dépendant de la déformation dans le cas général.

Fonctionnement d'un modèle de plasticité instantanée



- Décomposition de la déformation, $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$;
- *Domaine d'élasticité*, défini par une fonction f
- *Ecrouissage*, variables d'écrouissage, A_I .

Les briques de base pour les modèles de matériau



Différents types de rhéologies

- Plasticité indépendante du temps

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad d\varepsilon^p = f(\dots)d\sigma$$

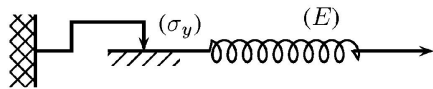
- Elasto-viscoplasticité

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad d\varepsilon^p = f(\dots)dt$$

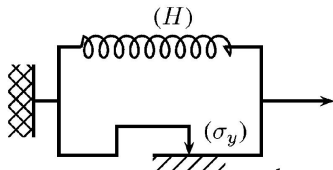
- Viscoélasticité

$$F(\sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) = 0$$

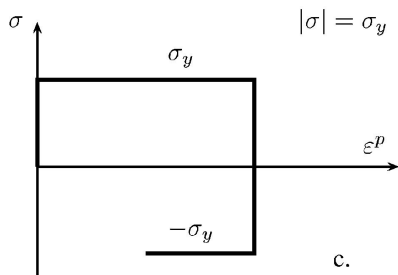
Plasticité indépendante du temps



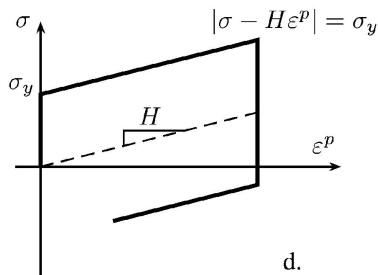
a.



b.



c.



d.

Modèle élastique–parfaitement plastique

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y$$

- domaine d'élasticité si : $f < 0$ ($\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e = \dot{\sigma}/E$)
- décharge élastique si : $f = 0$ et $\dot{f} < 0$ ($\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e = \dot{\sigma}/E$)
- écoulement plastique si : $f = 0$ et $\dot{f} = 0$ ($\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^p$)

f s'appelle *fonction de charge*,
la condition $\dot{f} = 0$ est la *condition de cohérence*

Modèle de Prager

$$f(\boldsymbol{\sigma}, X) = |\boldsymbol{\sigma} - X| - \sigma_y \quad \text{avec } X = H\varepsilon^p$$

Écoulement plastique si on vérifie à la fois $f = 0$ et $\dot{f} = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial X} \dot{X} = 0$$

$$\text{signe}(\boldsymbol{\sigma} - X) \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \text{signe}(\boldsymbol{\sigma} - X) \dot{X} = 0$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{X}, \text{ et : } \dot{\varepsilon}^p = \dot{\boldsymbol{\sigma}}/H$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{E + H} \dot{\varepsilon}$$

Écriture générale des équations de l'élastoplasticité uniaxiale

- domaine d'élasticité si

$$f(\sigma, A_i) < 0 \quad (\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E)$$

- décharge élastique si

$$f(\sigma, A_i) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}(\sigma, A_i) < 0 \quad (\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E)$$

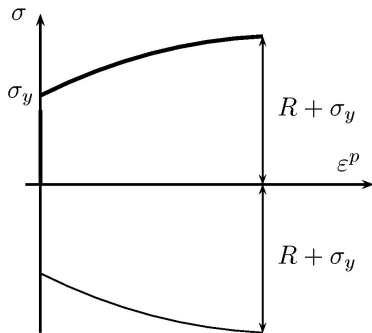
- écoulement plastique si

$$f(\sigma, A_i) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}(\sigma, A_i) = 0 \quad (\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E + \dot{\epsilon}^p)$$

condition de cohérence :

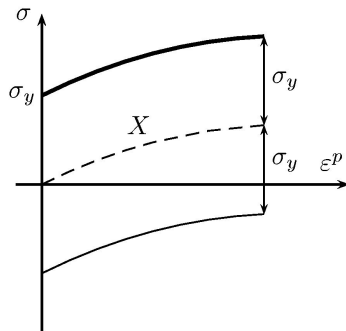
$$\dot{f}(\sigma, A_i) = 0$$

Illustration des deux types d'érouissage



a. Isotropic

$$f(\sigma, R) = |\sigma| - R - \sigma_y$$



b. Kinematic

$$f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y$$

Modèle d'écroutissage isotrope : A REVOIR

$$dR/dp = H(p, \text{déformation plastique cumulée} : \dot{p} = |\dot{\epsilon}^P|)$$

$$f(\sigma, R) = |\sigma| - R - \sigma_y$$

Écoulement plastique ssi $f = 0$ et $\dot{f} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0$$

$$\text{sign}(\sigma) \dot{\sigma} - \dot{R} = 0$$

$$\dot{\sigma} = \text{sign}(\sigma) \dot{R}, \text{ and : } \dot{p} = \text{sign}(\sigma) \dot{\sigma} / H$$

- Ramberg-Osgood : $\sigma = \sigma_y + Kp^m$
- Loi exponentielle : $\sigma = \sigma_u + (\sigma_y - \sigma_u) \exp(-bp)$

La variable d'état est la déformation plastique cumulée

Rhéologie :
Plus de détails sur mms2.ensmp.fr

Plan

Rhéologie

Matériaux

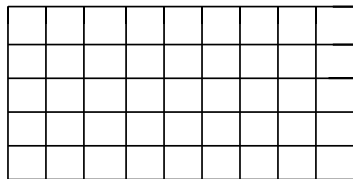
Critères insensibles à la pression hydrostatique

Plasticité 3D sans écrouissage

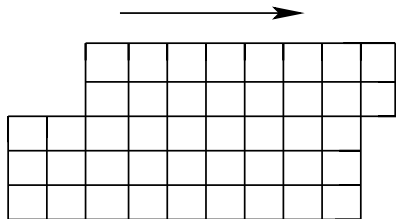
Plasticité 3D avec écrouissage

Glissement dans les matériaux cristallins

matériaux métalliques, roches

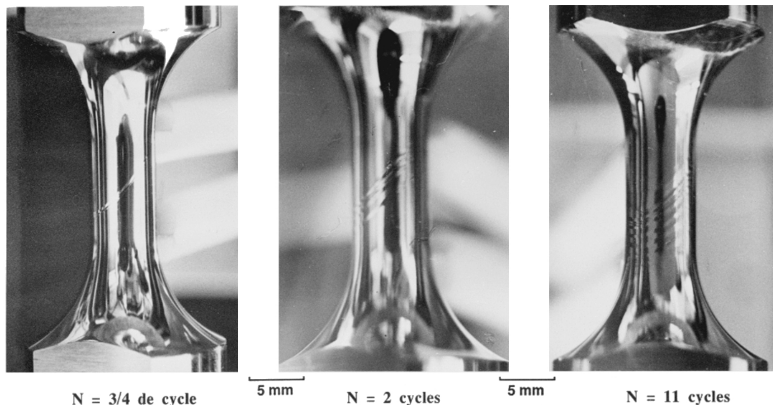


Réseau cristallin



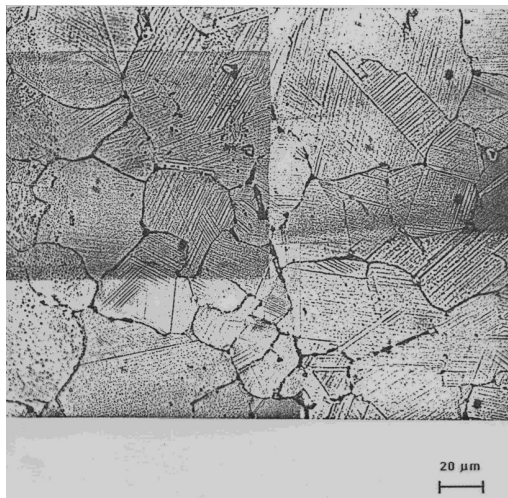
Glissement sans
changement de volume

Système de glissement dans un monocristal



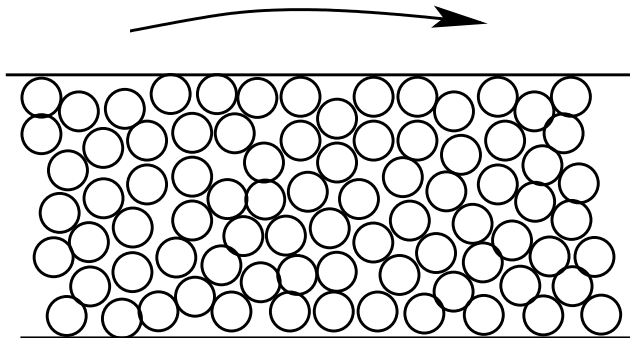
Thèse F. Harriot (ENSMP-CDM, Evry)

Système de glissement dans un alliage polycristallin base nickel

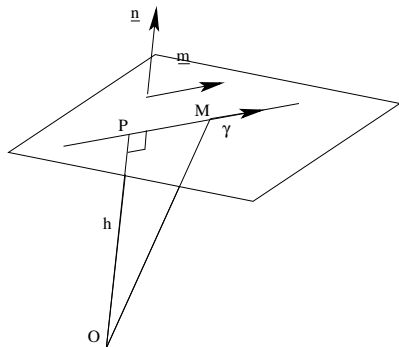


Clavel (ECP, Châtenay)

Cisaillement et variation de volume, poudres, sols



Déformation produite par le glissement cristallographique



$$\underline{u} = (\gamma h) \underline{m} = \gamma (\underline{OM} \cdot \underline{n}) \underline{m}$$

$$u_i = \gamma x_k n_k m_i$$

$$u_{i,j} = \gamma x_{k,j} n_k m_i \quad u_{j,i} = \gamma x_{k,i} n_k m_j$$

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} = \gamma (n_j m_i + n_i m_j)$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\gamma}{2} (\underline{m} \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{m}) = \gamma \underline{\tilde{m}}$$

$$\text{avec : } \underline{\tilde{m}} = \frac{1}{2} (\underline{m} \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{m})$$

$$\text{trace}(\underline{\varepsilon}) = \gamma n_i m_i = 0$$

Le tenseur $\underline{\tilde{m}}$ permet de calculer la *cission résolue* :

$$\underline{\tau}^s = (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}^s) \cdot \underline{m}^s = \sigma_{ij} n_j^s m_i^s = \frac{1}{2} \sigma_{ij} (n_i^s m_j^s + n_j^s m_i^s) = \underline{\sigma} : \underline{\tilde{m}}^s$$

$$\text{Loi de Schmid : } f(\underline{\sigma}) = |\underline{\tau}^s| - \tau_c$$

Definition of the slip systems in a FCC single crystal

The four octahedral planes of a cubic crystal previously shown have three systems. Here is the collection of the 12 systems, defined by \underline{n} and \underline{m} :

num syst	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sqrt{3}n_1$	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
$\sqrt{3}n_2$	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
$\sqrt{3}n_3$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
$\sqrt{2}m_1$	-1	0	-1	-1	0	1	0	1	1	-1	1	0
$\sqrt{2}m_2$	0	-1	1	0	1	1	-1	1	0	1	0	1
$\sqrt{2}m_3$	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1

Orientation tensors of a FCC single crystal

num syst	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sqrt{6}m_{11}$	-1	0	-1	-1	0	1	0	-1	-1	-1	1	0
$\sqrt{6}m_{22}$	0	-1	1	0	-1	-1	-1	1	0	1	0	1
$\sqrt{6}m_{33}$	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	-1	-1
$2\sqrt{6}m_{12}$	-1	-1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
$2\sqrt{6}m_{23}$	1	0	1	-1	0	1	0	1	1	-1	1	0
$2\sqrt{6}m_{31}$	0	1	-1	0	1	1	-1	1	0	1	0	1

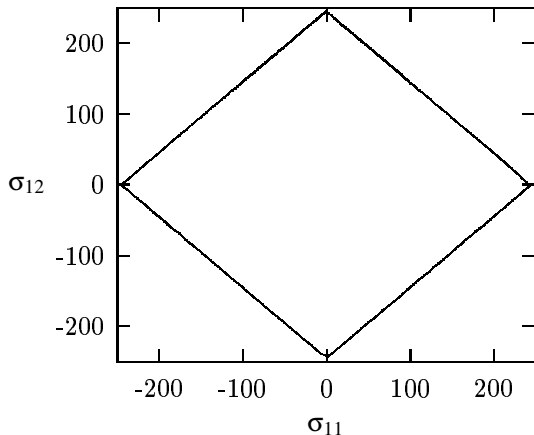
- If the only non zero terms of the stress tensor are σ_{11} , σ_{12} and σ_{21} , the criterion writes :

$$|\sigma_{11}m_{11} + 2\sigma_{12}m_{12}| - \tau_c = 0$$

- If the only non zero terms of the stress tensor are σ_{11} , et σ_{33} , the criterion writes :

$$|\sigma_{11}m_{11} + \sigma_{33}m_{33}| - \tau_c = 0$$

Domaine d'élasticité en σ_{11} - σ_{12} pour un cristal CFC



Le repère cristallographique coïncide avec les axes de chargement :

- *les systèmes 1 and 11 donnent :*

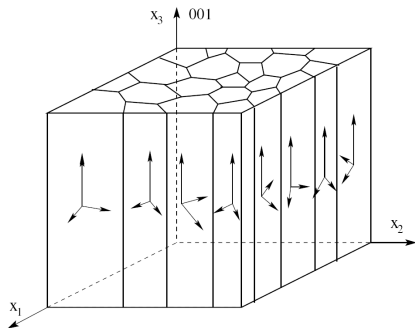
$$|\sigma_{11} + \sigma_{12}| = \tau_c \sqrt{6}$$

- *systems 4 and 9 give :*

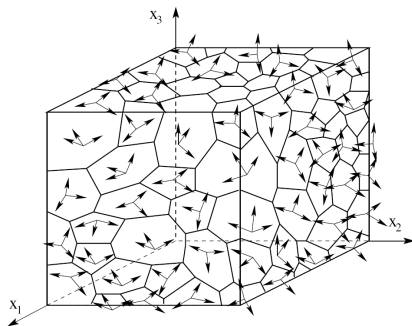
$$|\sigma_{11} - \sigma_{12}| = \tau_c \sqrt{6}$$

This figure is computed for $\tau_c=100$ MPa.

Réflexion sur la construction des surfaces de charge



**Alliage à
solidification dirigée**



Polycristal

Evaluer des surfaces de charge

Matériau :
[Plus de détails sur mms2.ensmp.fr](http://mms2.ensmp.fr)

Plan

Rhéologie

Matériaux

Critères insensibles à la pression hydrostatique

Plasticité 3D sans écrouissage

Plasticité 3D avec écrouissage

Critère de Tresca

- *Il y a toujours un système bien positionné*
- On néglige l'hétérogénéité élastique
- Le cisaillement maximum reste inférieur à une valeur critique.
- $\text{Max}_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_y = 0$
- σ_y est la limite d'élasticité en traction simple

Caractérisation du cisaillement maximum

- Tenseur de contrainte dans le repère principal :=
$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$
- Vecteur contrainte pour une normale \underline{n} dans le plan (x_1-x_2) (avec $\theta = \text{angle}(x_1, n)$) :

$$T_n = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta$$

$$|T_t| = (T^2 - T_n^2)^{1/2} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} \sin 2\theta$$

- Cercle de Mohr :

$$\left(T_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + T_t^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2$$

- Cisaillement maxi

$$|T_t^{max}| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$$

Caractérisation d'un matériau isotrope

- Invariants du tenseur de contraintes :

$$I_1 = \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = (1/2) \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}})^2 = (1/2) \sigma_{ij} \sigma_{ji}$$

$$I_3 = (1/3) \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}})^3 = (1/3) \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}$$

- Invariants du déviateur ($\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - (I_1/3) \underline{\underline{I}}$) :

$$J_1 = \text{trace}(\underline{\underline{s}}) = 0$$

$$J_2 = (1/2) \text{trace}(\underline{\underline{s}})^2 = (1/2) s_{ij} s_{ji}$$

$$J_3 = (1/3) \text{trace}(\underline{\underline{s}})^3 = (1/3) s_{ij} s_{jk} s_{ki}$$

- On pose :

$$J = ((3/2) s_{ij} s_{ji})^{0,5} = ((1/2) ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2))^{0,5} = |\underline{\underline{\sigma}}|$$

Critère de von Mises (J)

- Il dépend du second invariant du déviateur de contraintes :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = J - \sigma_y$$

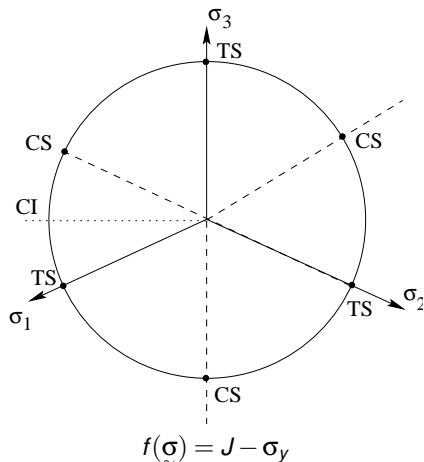
- Sphère dans l'espace des contraintes déviatoriques
- Contrainte de cisaillement octaédral :
sur une facette de normale $(1,1,1)$, le vecteur contrainte a pour composantes normale σ_{oct} et tangentielle τ_{oct} :

$$\sigma_{oct} = (1/3) I_1 \quad ; \quad \tau_{oct} = (\sqrt{2}/3) J$$

- Energie élastique de distorsion (associée à la partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$).

$$W_{ed} = \frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}} = \frac{1}{6\mu} J^2$$

Contour du critère de von Mises dans le plan déviateur



TS désigne les points qui peuvent se ramener à de la traction simple, CS ceux qui peuvent se ramener à la compression simple (par exemple un chargement biaxial, car un état où les seules contraintes non nulles sont $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ est équivalent à $\sigma_3 = -\sigma$), CI un état de cisaillement

Critères ne faisant pas intervenir la pression hydrostatique

- Critère de von Mises

$$f(\underline{\sigma}) = J - \sigma_y$$

- Critère de Tresca

$$f(\underline{\sigma}) = \text{Max}_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_y$$

- Utilisation du deuxième et du troisième invariant

$$f(\underline{\sigma}) = \text{fct}(J_2, J_3)$$

Comparaison des critères de Tresca et von Mises

- Dans le plan traction-cisaillement

– von Mises : $f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{0,5} - \sigma_y$

– Tresca : $f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{0,5} - \sigma_y$

- Dans le plan des contraintes principales (σ_1, σ_2)

– von Mises : $f(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{0,5} - \sigma_y$

– Tresca : $f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2 - \sigma_y$ si $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2$

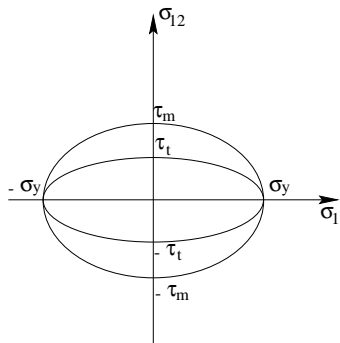
$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_y$ si $0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$

$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_y$ si $\sigma_2 \leq 0 \leq \sigma_1$

(symétrie par rapport à l'axe $\sigma_1 = \sigma_2$)

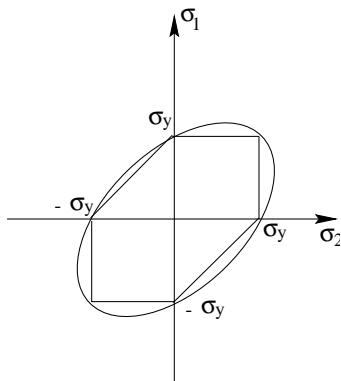
- Dans le plan déviateur, von Mises = cercle, Tresca = hexagone
- Dans l'espace des contraintes principales, cylindres de génératrice (1,1,1)

Comparaisons des critères de Tresca et de von Mises



a. En traction-cisaillement (von Mises :

$$\tau_m = \sigma_y / \sqrt{3}, \text{ Tresca : } \tau_t = \sigma_y / 2)$$



b. En traction biaxiale

Critères :
[Plus de détails sur mms2.ensmp.fr](http://mms2.ensmp.fr)

Plan

Rhéologie

Matériaux

Critères insensibles à la pression hydrostatique

Plasticité 3D sans écrouissage

Plasticité 3D avec écrouissage

Plasticité 3D

- Décomposition de la déformation

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_I)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = (T - T_I) \alpha$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_I) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$$

- Critères

f

- Lois d'écoulement

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \dots \quad \text{Cette séance}$$

- Lois d'écrouissage

$$\dot{A}_I = \dots \quad \text{Prochaine séance}$$

NOTE : dérivée partielle de \underline{s} et de J par rapport à $\underline{\sigma}$

- On aura à exprimer $\frac{\partial J}{\partial \underline{\sigma}}$ pour calculer \underline{n}
- La dérivée de \underline{s} par rapport à $\underline{\sigma}$ est le tenseur $\underline{J} = \underline{I} - \frac{1}{3}\underline{I} \otimes \underline{I}$, qui s'écrit en notation indicielle :

$$J_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

en effet :

$$\underline{s} = \underline{J} : \underline{\sigma}$$

- Dérivée de J par rapport à $\underline{\sigma}$:

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \underline{s}} : \frac{\partial \underline{s}}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial ((3/2)\underline{s} : \underline{s})^{1/2}}{\partial \underline{s}} : \underline{J} = \frac{3}{2} \frac{\underline{s}}{J} : \underline{J} = \frac{3}{2} \frac{\underline{s}}{J}$$

- Autre solution :

$$J^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \quad \text{donc} \quad 2J dJ = 3s_{ij} ds_{ij} = 3s_{ij} d\sigma_{ij}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{J} \quad \frac{\partial J}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3\underline{s}}{2J}$$

Puissance plastique pour un monocristal en glissement simple

- Equivalence entre :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\gamma}}} m = \tau \dot{\gamma}$$

- Il y a glissement si la cission est égale à la cission critique :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \tau_c \dot{\gamma}$$

- En appliquant le critère de Schmid, chaque τ^* admissible doit vérifier :

$$\tau^* \leq \tau_c$$

- Donc :

$$\tau^* \dot{\gamma} \leq \tau_c \dot{\gamma}$$

- Si bien que :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \leq \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$$

Principe du travail maximal

“Le travail des contraintes réelles $\tilde{\sigma}$ associées aux vitesses de déformations plastiques réelles $\tilde{\dot{\epsilon}}^P$ est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissible $\tilde{\sigma}^*$ (id est ne violant pas la loi de plasticité) associé à $\tilde{\dot{\epsilon}}^P$ ”. (Hill, 1951)

$$(\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^*) : \tilde{\dot{\epsilon}}^P \geq 0$$

- La solution du problème d'écoulement plastique maximise la puissance plastique $\tilde{\sigma} : \tilde{\dot{\epsilon}}^P$
- Il s'agit d'une maximisation *sous contrainte*, car on doit avoir $f(\tilde{\sigma}) \leq 0$

Normalité

Pour maximiser la puissance plastique en assurant $f \leq 0$,
 ... on forme \mathbb{F} qui combine la fonction à maximiser et la contrainte à l'aide d'un
multiplicateur plastique (problème d'optimisation non linéaire).

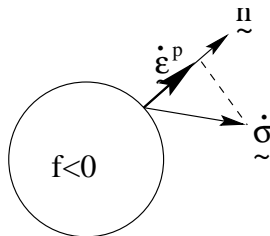
- On annule les dérivées partielles $\partial \mathbb{F} / \partial \underline{\underline{\sigma}} = 0$:

$$\mathbb{F}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^p - \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}})$$

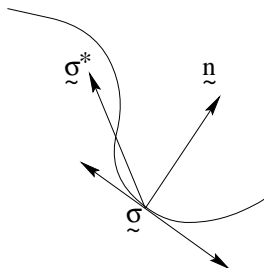
$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

- On a effectivement un *max* si la fonction f est *convexe*

Convexité de la surface de charge



a. Illustration de la règle de normalité

b. Convexité de f

Principe de Hill $\equiv (f \text{ convexe et écoulement normal})$

Direction d'écoulement associée au critère de von Mises

- Modèle parfaitement plastique $f(\underline{\sigma}) = J(\underline{\sigma}) - \sigma_y$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} n_{ij} \quad \underline{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \underline{n}$$

$$n_{ij} = \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{J} \quad \underline{n} = \frac{\partial J}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{s}}{J}$$

- On appelle *déformation plastique cumulée*, p , la longueur du trajet représentant l'écoulement dans l'espace des déformations plastiques, soit, au temps t ,

$$p(t) = \int_0^t \dot{p}(\tau) d\tau \quad \dot{p} = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3} \underline{\dot{\varepsilon}}^p : \underline{\dot{\varepsilon}}^p \right)^{1/2}$$

- Avec le critère de von Mises $\dot{p} = \dot{\lambda}$

Ecoulement pour le modèle de von Mises sous chargement uniaxial

- Une seule composante du tenseur de contrainte est non nulle

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{s} = \frac{2\sigma}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

- Calcul de la normale, avec $J = |\sigma|$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{3}{2} \frac{\underset{\sim}{s}}{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \text{signe}(\sigma)$$

- Composantes de la vitesse de déformation plastique

$$\dot{\epsilon}_{11}^p = \dot{\lambda} = \dot{\rho} \quad \dot{\epsilon}_{22}^p = \dot{\epsilon}_{33}^p = -\frac{\dot{\rho}}{2}$$

Direction d'écoulement associée au critère de Tresca

- Si $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, : $f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_y$, il s'établit un écoulement plastique de cisaillement pur, avec $\tilde{\varepsilon}_{22}^p = 0$

$$\tilde{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- En traction simple, par exemple $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = 0$:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_y, \text{ ou } f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_y$$

$$\tilde{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \dot{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comportement parfaitement plastique

Au cours de l'écoulement plastique, le point représentatif de l'état de contrainte ne peut que "tourner" autour du domaine d'élasticité. Le multiplicateur plastique ne peut pas se déterminer en termes de vitesse de contrainte

$$\text{pour } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \text{ et } \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \quad : \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda} \underline{\underline{n}}$$

$$\text{au cours de l'écoulement} \quad : \quad \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = 0$$

Comportement parfaitement plastique, déformation imposée

- Elasticité

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\sigma}} = 0$$

- Projection sur la normale à la surface

$$\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p) = \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \dot{\lambda} \underline{\underline{n}}$$

- Expression du multiplicateur plastique en fonction de la vitesse de déformation totale

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\epsilon}}}{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}}$$

- Expression de la vitesse de déformation plastique

$$\underline{\underline{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \underline{\underline{n}} = \frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\epsilon}}}{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}} \underline{\underline{n}}$$

Comportement parfaitement plastique, tenseur élastoplastique, $\underline{\underline{L}}^{ep}$

- Vitesse de contrainte $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p)$
- En remplaçant la vitesse de déformation plastique

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{\Lambda}} : \left(\frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}} \underline{\underline{n}} \right)$$

- Comme $\Lambda_{ijkl} n_{pq} \Lambda_{pqrs} \dot{\epsilon}_{rs} n_{kl} = \Lambda_{ijkl} n_{kl} n_{pq} \Lambda_{pqrs} \dot{\epsilon}_{rs}$, on en déduit $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{L}}^{ep} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$, avec

$$\underline{\underline{L}}^{ep} = \underline{\underline{\Lambda}} - \frac{(\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}) \otimes (\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}})}{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}}$$

Formellement, c'est une relation de type élasticité, mais exprimée «en vitesse»

Comportement parfaitement plastique, cas de l'élasticité isotrope et du critère de von Mises

- Simplifications possibles

$$\Lambda_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad ; \quad n_{ij} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{J}$$

$$n_{ij} \Lambda_{ijkl} = 2\mu n_{kl} \quad ; \quad n_{ij} \Lambda_{ijkl} n_{kl} = 3\mu \quad ; \quad n_{ij} \Lambda_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = 2\mu n_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{2}{3} \tilde{n} : \tilde{\dot{\epsilon}}$$

- Cas du chargement uniaxial : dans ce cas, la vitesse de déformation totale est égale à la vitesse de déformation plastique, normale est la diagonale $(1, -1/2, -1/2) \text{signe}(\sigma)$. La vitesse de déformation totale est la diagonale $(\dot{\epsilon}_{11}^p, -\dot{\epsilon}_{11}^p/2, -\dot{\epsilon}_{11}^p/2)$, on retrouve bien :

$$\dot{\lambda} = \dot{\epsilon}_{11}^p \text{signe}(\sigma)$$

Plasticité 3D :
Plus de détails sur mms2.ensmp.fr

Plan

Rhéologie

Matériaux

Critères insensibles à la pression hydrostatique

Plasticité 3D sans écrouissage

Plasticité 3D avec écrouissage

Introduction des variables d'écrouissage

- Notion de *variables d'état*, α_I , qui interviennent dans l'énergie libre (Ψ , énergie libre spécifique, potentiel d'état)

$$\rho\Psi = \rho\Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, \alpha_I)$$

- La variation de Ψ désigne l'énergie stockée pendant le process de déformation

$$\rho\dot{\Psi} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_I} \dot{\alpha}_I = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e + A_I \dot{\alpha}_I$$

- Définition des *variables d'écrouissage* par extension de la notion de potentiel élastique

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \quad A_I = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_I}$$

- On suppose que les variables d'état suffisent pour représenter l'ensemble de l'histoire passée
- Les variables d'écrouissage reflètent l'effet mécanique des variables d'état sur le comportement du matériau

Définition de la dissipation intrinsèque

- La dissipation est la différence entre l'énergie mécanique fournie et l'énergie stockée de façon temporaire

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \dot{\Psi} = (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p) - (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e + A_i \dot{\alpha}_i)$$

- Il n'y a bien entendu pas de dissipation si le comportement est purement élastique
- Le modèle *standard généralisé* utilise des contraintes et des déformations généralisées :

$$Z = (\underline{\underline{\sigma}}, A_i) \quad z = (\underline{\underline{\varepsilon}}^p, -\alpha_i) \quad \mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p - A_i \dot{\alpha}_i = Z \dot{z}$$

- L'unité de Z est le Pa, ou encore le J.m^{-3} ; celle de \dot{z} est la s^{-1} ; celle de \mathcal{D} est donc le $\text{J.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$, ou le W.m^{-3}

Écoulement plastique

- *Rappel, travail maximal pour un matériau parfaitement plastique :*
 - Hill : il faut réaliser le max de $\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}}^P$
 - On maximise $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}}^P$ sous la contrainte $f(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha_I) \leq 0$
- Extension du principe du travail maximal ; au lieu de la puissance plastique, on cherche à maximiser la *dissipation intrinsèque*

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}}^P - A_I \dot{\alpha}_I = Z \dot{z}$$

- Il faut maximiser $Z \dot{z}$ sous la contrainte $f \leq 0$; on pose :

$$\mathbb{F}(\underline{\underline{\sigma}}, A_I) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}}^P - A_I \dot{\alpha}_I - \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}}, A_I)$$

et on annule $\partial \mathbb{F} / \partial Z$, soit $\partial \mathbb{F} / \partial \underline{\underline{\sigma}}$ et $\partial \mathbb{F} / \partial A_I$

- Normalité pour l'écoulement plastique *et* pour l'écoulement :

$$\dot{z} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial Z} \quad \text{soit :} \quad \underline{\underline{\xi}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda} \underline{\underline{\eta}} \quad \dot{\alpha}_I = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial A_I}$$

Dissipation pour un modèle standard généralisé

- Dans le cas où les dérivées sont nulles, on a bien atteint un maximum si f est une fonction convexe de ses variables $\underline{\sigma}$ et A_i
- On retrouve sous forme généralisée l'équivalence

Parmi tous les Z^* admissibles, Z réel maximise la dissipation intrinsèque

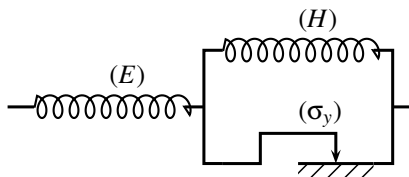
\equiv

La direction d'écoulement \dot{z} est normale à la surface définie par f ; le domaine défini par f est convexe.

- Si le domaine défini par f est convexe et contient $(Z = 0)$, la dissipation \mathcal{D} est automatiquement positive.

$$(Z - Z^*)\dot{z} = (Z - Z^*)\frac{\partial \Omega}{\partial Z} \geq 0$$

Exemple : écoulement cinématique linéaire 1D



Energie stockée

- Les variables d'état sont ε^e et la déformation dans le ressort (H) , ε^p
- L'énergie libre est l'énergie élastique provisoirement stockée dans les ressorts

$$\Psi(\varepsilon^e, \varepsilon^p) = 0.5E\varepsilon^{e2} + 0.5H\varepsilon^{p2}$$

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} = E\varepsilon^e \quad X = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^p} = H\varepsilon^p$$

- Elasticité (σ, ε^e) , écoulement (X, ε^p)

Exemple : écoulement cinématique linéaire 1D

Energie dissipée

- Dissipation intrinsèque est caractérisée par :
taux d'énergie dissipée = énergie fournie - énergie stockée
- Cas 1D considéré précédemment :

$$\mathcal{D} = \sigma \dot{\varepsilon} - \dot{\Psi} = (\sigma \dot{\varepsilon}^e + \sigma \dot{\varepsilon}^p) - (\sigma \dot{\varepsilon}^e + X \dot{\varepsilon}^p) = \sigma \dot{\varepsilon}^p - X \dot{\varepsilon}^p$$

- Le critère de plasticité s'écrit $f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y = 0$.
- La dissipation est donc le résultat du frottement sur le patin, en effet, avec $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\rho} \text{signe}(\sigma - X)$:

$$\mathcal{D} = (\sigma - X) \dot{\varepsilon}^p = |\sigma - X| \dot{\rho} = \sigma_y \dot{\rho}$$

- L'énergie stockée, $0.5 H \varepsilon^p{}^2$, est libérée à la décharge
- Notion de *contraintes généralisées* : (σ, X) , de *déformations généralisées* : $(\varepsilon^e, \varepsilon^p)$

Dissipation dans le cas de l'écrouissage isotrope en 1D

- La variable A_I est R , la variable α_I associée est p
- Le critère de plasticité est :

$$f(\sigma, R) = |\sigma| - R - \sigma_y = 0$$

- L'énergie libre s'écrit

$$\Psi(\varepsilon^e, p) = 0.5E\varepsilon^e{}^2 + 0.5Hp^2$$

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} = E\varepsilon^e \quad R = \frac{\partial \Psi}{\partial p} = Hp$$

- Taux d'énergie dissipée = énergie fournie - énergie stockée

$$\mathcal{D} = \sigma \dot{\varepsilon} - \dot{\Psi} = \sigma \dot{\varepsilon} - \sigma \dot{\varepsilon}^e - R \dot{p} = \sigma \dot{\varepsilon}^p - R \dot{p} = (|\sigma| - R) \dot{p} = \sigma_y \dot{p}$$

- L'énergie stockée dans le matériau ne peut pas être récupérée, car p croît de façon monotone

Retour sur les variables d'écrouissage à utiliser

- Critère de von Mises avec écrouissage cinématique et isotrope :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R) = J(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - R - \sigma_y$$

- Soient $\underline{\underline{\alpha}}$ et r les variables d'état associées à $\underline{\underline{X}}$ et R
- Ecrouissage cinématique

$$\underline{\underline{\dot{\alpha}}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{X}}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^p}$$

- Ecrouissage isotrope

$$\dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} = \dot{\lambda} = \dot{p}$$

- Les variables pertinentes pour les écrouissages cinématique et isotrope sont bien respectivement $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ et p

Formulation des lois de comportement plastique

- Domaine d'élasticité

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, A_I) < 0 \quad (\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}})$$

- Décharge élastique

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, A_I) = 0 \quad \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}, A_I) < 0 \quad (\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}})$$

- Ecoulement plastique

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, A_I) = 0 \quad \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}, A_I) = 0 \quad (\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p)$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \dots \quad \dot{\alpha}_I = \dots$$

Loi de Prandtl-Reuss (1/2)

- Critère de von Mises et écrouissage isotrope

$$f(\underline{\sigma}, R) = J(\underline{\sigma}) - \sigma_y - R(p)$$

- Il faut trouver le multiplicateur plastique dans

$$\underline{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

- Le module plastique, H , définit la courbe d'écrouissage 1D monotone, $\sigma = \sigma(\varepsilon^p)$

$$H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{dp} = \frac{dR}{dp} \quad \sigma = \sigma_y + R(p)$$

- Utilisation de la condition de cohérence :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0 \quad \underline{n} : \underline{\dot{\sigma}} - H\dot{p} = 0$$

Loi de Prandtl-Reuss (2/2)

- On trouve donc le multiplicateur

$$\dot{\lambda} = \dot{\rho} = \frac{\tilde{n} : \dot{\tilde{\sigma}}}{H}$$

- Expression 3D de la vitesse de déformation plastique

$$\tilde{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \tilde{n} = \frac{\tilde{n} : \dot{\tilde{\sigma}}}{H} \tilde{n} \quad \tilde{n} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} = \frac{3s}{2J}$$

- Cas particulier de la traction simple

$$n_{11} = \text{signe}(\sigma) \quad \tilde{n} : \dot{\tilde{\sigma}} = \dot{\sigma} \text{signe}(\sigma) \quad \dot{\lambda} = \dot{\rho} = \dot{\epsilon}_{11}^p$$

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{n_{11} \dot{\sigma}}{H} n_{11} = \frac{\dot{\sigma}}{H}$$

Loi de Hencky – von Mises

- Hypothèse de *chargement simple*

«le chargement extérieur en termes de contraintes croît proportionnellement à un seul paramètre scalaire k , à partir d'un état initial non écroui ($0 \leq k \leq 1$)»

$$\underline{\underline{\sigma}} = k \underline{\underline{\sigma}}_M \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \dot{k} \underline{\underline{\sigma}}_M \quad \underline{\underline{s}} = k \underline{\underline{s}}_M \quad J = k J_M \quad \sigma_y = k_e J_M$$

$$\underline{\underline{n}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}_M}{J_M} \quad \frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}}{H} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}_M}{J_M} : \frac{\underline{\underline{\sigma}}_M \dot{k}}{H} = \frac{J_M \dot{k}}{H}$$

- Pas de couplage entre les composantes

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \left(\frac{J_M \dot{k}}{H} \right) \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}_M}{J_M} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}_M \dot{k}}{H}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p(k) = \int_{k_e}^k \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}_M}{H} d\kappa = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}_M}{H} (k - k_e)$$

Loi de Prager (1/2)

- Critère de von Mises et écouissage cinématique

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}) = J(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - \sigma_y \quad J(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) = ((3/2)(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}) : (\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}))^{0,5}$$

- On pose

$$\underline{\underline{X}} = (2/3)H\varepsilon^p$$

- Utilisation de la condition de cohérence :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{X}}} : \underline{\underline{\dot{X}}} = 0 \quad \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{X}}} = 0 \quad \underline{\underline{n}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}}{J(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})}$$

- On trouve donc le multiplicateur plastique

$$\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{X}}} = \underline{\underline{n}} : \frac{2}{3} H \dot{\lambda} \underline{\underline{n}} = H \dot{\lambda} \quad \dot{\lambda} = (\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}) / H$$

Loi de Prager (2/2)

- Même expression formelle qu'en écrouissage isotrope, mais \tilde{n} est différent

$$\tilde{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \tilde{n} = \frac{\tilde{n} : \dot{\sigma}}{H} \tilde{n} \quad \tilde{n} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{s} - X}{J(\tilde{\sigma} - X)}$$

- Sous chargement uniaxial, on pose

$$\sigma = \sigma_{11} \quad X = (3/2)X_{11}$$

- On obtient

$$J(\tilde{\sigma} - X) = |\sigma - X| \quad n_{11} = \frac{3}{2} \frac{s_{11} - X_{11}}{J} = \text{signe}(\sigma - X)$$

$$|\sigma - X| = \sigma_y \quad \dot{\sigma} = \dot{X} = H \dot{\epsilon}^p$$

Écoulement à vitesse de déformation totale imposée

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p) \quad \text{et} : \quad \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = H \dot{p}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}{H + \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}}$$

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p) = \left(\underline{\underline{\Lambda}} - \frac{(\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}) \otimes (\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}})}{H + \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}} \right) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$$

Élasticité isotrope et matériau de von Mises :

$$\dot{\lambda} = \frac{2\mu \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}{H + 3\mu}$$

Plasticité avec écouissage :

Plus de détails sur mms2.ensmp.fr



Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.-L., and Forest, S. (2001).

Mécanique non-linéaire des matériaux.

Hermès.



Doghri, I. (2000).

Mechanics of Deformable Solids. Linear and Nonlinear, Analytical and Computational Aspects.

Springer Verlag.



Germain, P. (1973).

Mécanique des milieux continus.

Masson.



Hill, R. (1998).

The Mathematical Theory of Plasticity (1st ed, 1950).

Oxford Classic Texts in the Physical Sciences.



Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (1985).

Mécanique des matériaux solides.

Dunod, Paris.



Lubliner, J. (1990).

Plasticity Theory.

Mc Millan.



Mandel, J. (1966).

Cours de mécanique des milieux continus – Tomes I et II.

Gauthier–Villars / réédition 1994, J. Gabay.